Лекция 12.
Приближение Френеля. Дифракция Френеля.

В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля суммирование вторичных волн в произвольной точке наблюдения M_1 производится с помощью *интеграла Гюйгенса-Френеля*, который имеет вид:

$$\varepsilon\left(M_1\right) = \int\limits_{\Sigma} \varepsilon_0(M)\frac{exp(-ik\rho)}{\rho}K(\varphi)d\sigma. \qquad (3.1)$$

Здесь $\varepsilon(M_1)$ и $\varepsilon_0(M)$, соответственно, амплитуды суммарного волнового поля в точке наблюдения M_1 и поля элементарного вторичного источника площадью $d\sigma$, расположенного в произвольной точке M открываемого объектом волнового фронта падающей волны; второй множитель в подынтегральном выражении описывает пространственную часть сферической волны, излучаемой элементарным источником, а множитель $K(\varphi)$ учитывает, что вклад элемента $d\sigma$ в суммарное поле зависит от угла φ между нормалью к площади элемента и направлением радиус - вектора $\vec{\rho}$ в точку наблюдения (см. рис.3.1):

$$K(\varphi) = \frac{i}{\lambda}\left(\frac{1+\cos\varphi}{2}\right). \qquad (3.1)$$

Интегрирование в выражении (3.1) производится по всем элементам светового фронта суммарной площадью Σ, открываемым объектом. Запишем формулу (3.1) в координатном представлении предполагая, что **углы дифракции малы** $\varphi << 1$, **т.е.** $K(\varphi) \approx i/\lambda$, и, следовательно, амплитуда поля в интеграле (3.1) не зависит от положения элемента светового фронта:

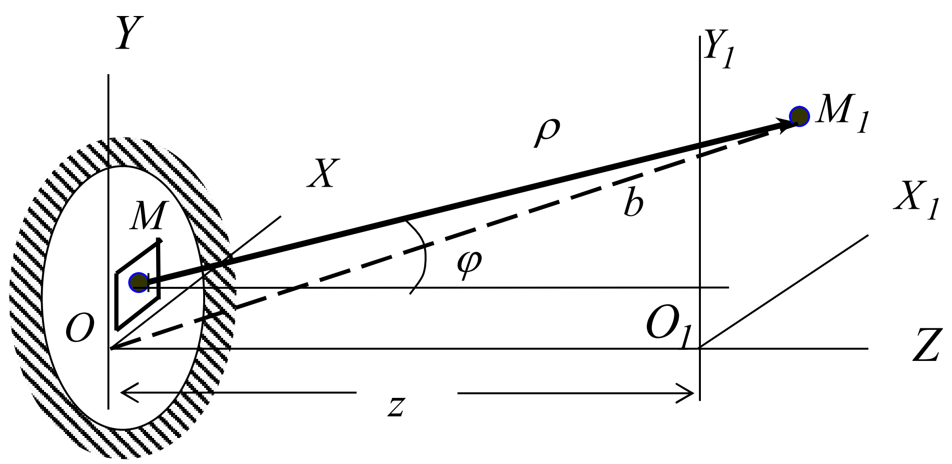


Рис.3.1. К построению дифракционной картины

$$\varepsilon(x_1, y_1, z) = \frac{i}{\lambda} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_0(x, y) \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho}\, dx\, dy, \qquad (3.2)$$

где $\rho = \left(z^2 + (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\right)^{1/2}$.

Упростим формулу (3.2), полагая, что в *приближении Френеля* дифракционное уширение изображения мало вследствие малости углов дифракции:

$$\varphi_x \approx (x_1 - x)/z << 1, \; \varphi_y \approx (y_1 - y)/z << 1.$$

Для этого случая в быстро осциллирующем на длине волны показателе экспоненты представим радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ в приближенном виде, сохранив члены, *квадратичные* по углам дифракции φ_x^2, φ_y^2:

$$\rho \approx \left(z + \frac{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}{2z} \right), \qquad (3.3)$$

а в медленно меняющемся при перемещении по области интегрирования знаменателе подынтегрального выражения полагаем $\rho \approx z = const$. С помощью полученного *интеграла Френеля*

$$\varepsilon(x_1, y_1, z) = \frac{i}{\lambda z} e^{-ikz} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_0(x, y) \exp\left(-ik \frac{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}{2z} \right) dx\, dy \qquad (3.4)$$

можно построить картину дифракции светового фронта на простых объектах: отверстии, щели, краю экрана. При этом показатель экспоненты под интегралом может принимать любые по модулю значения, как больше, так и меньше единицы.

Приближение Фраунгофера.

N_F << 1. В этом случае, называемом *дифракцией Фраунгофера*, объект открывает небольшую часть первой зоны Френеля, т.е. согласно формуле (3.6), дифракционная картина рассматривается на больших расстояниях от объекта (в *дальней зоне*). Поэтому, в отличие от предыдущих случаев, размер изображения даже при малых углах дифракции существенно превосходит размер объекта (см. рис.3.6в), т.е. здесь потеряна информация уже и о размере объекта. Разложение радиус-вектора ρ теперь проведем следующим образом:

$$\rho=\left(z^2+(x_1-x)^2+(y_1-y)^2\right)^{1/2}=\left(z^2+x_1^2+y_1^2+\left(x^2-2xx_1\right)+\left(y^2-2yy_1\right)\right)^{1/2}=$$

$$=\left(b^2+\left(x^2-2xx_1\right)+\left(y^2-2yy_1\right)\right)^{1/2}\approx b\left(1-\frac{xx_1}{b^2}-\frac{yy_1}{b^2}\right)$$

В этом разложении, мы пренебрегли малым членом разложения пропорциональным $(x/b)^2+(y/b)^2$, т.е. теперь, в отличие от приближения Френеля, ограничились только *линейными* членами в разложении ρ по малому параметру - отношению размера объекта к расстоянию до него. Интеграл (3.4) тогда имеет вид

$$\varepsilon(x_1,y_1)=\frac{i}{\lambda b}e^{-ikb}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_0(x,y)\exp\left\{\frac{ik}{b}xx_1+\frac{ik}{b}yy_1\right\}\,dxdy\,. \qquad (3.7)$$

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА КАК ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ ПРОПУСКАНИЯ ОБЪЕКТА

Из формулы (3.7) видно, что в используемом приближении дифракционная картина зависит лишь от угловой координаты точки наблюдения $x_1/b=sin\,\varphi_x$ *и* $y_1/b=\sin\varphi_y$, с другой стороны проекции вектора $k_x=k\sin\varphi_x$, $k_y=k\sin\varphi_y$.

Рассмотрим выражение

$$\varepsilon(k_x,k_y)=A\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_0(x,y)\exp i\left\{k_xx+k_yy\right\}\,dxdy\,. \qquad (3.8)$$

Интеграл (3.8) с математической точки зрения представляет собой пространственное преобразование Фурье амплитуды поля исходного пучка $\varepsilon_0(x,y)$ по поперечным компонентам волнового вектора $k_x=k\sin\varphi_x, k_y=k\sin\varphi_y$ направленного из точки O в точку наблюдения поля M_1. Здесь введено обозначение $A=i\exp(-ikb)/\lambda b$. Выражение (3.8) показывает, что дифракция Фраунгофера на каком-либо объекте имеет смысл пространственного *разложения на плоские волны* светового пучка, ограниченного этим объектом. Полученная дифракционная картина представляет собой *Фурье-образ* (спектр пространственных частот) поля волны, прошедшей через объект.

Удобной характеристикой объекта является функция пропускания $T(x,y)$, которая задается его поперечной структурой и определяется как отношение комплексной амплитуды прошедшей волны, которую будем теперь обозначать как $\varepsilon_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, к амплитуде падающей волны ε_0 :

$$T(x,y)=\frac{\varepsilon_1(x,y)}{\varepsilon_0}.$$

Двумерный интеграл вида (3.8) в случае однородного падающего потока можно тогда рассматривать и как Фурье-преобразование функции пропускания объекта. Рассмотрим примеры построения Фурье-спектра функции пропускания для простейших объектов.

$$\varepsilon(k_x,k_y)=A\int_{-\infty}^{\infty}T(x,y)\exp i\{k_x x+k_y y\}\,dxdy$$

1) **Прямоугольная щель.** Функция пропускания щели имеет вид:

$$T(x)=\begin{cases}1,\ \textit{при}\ \ |x|\le d_x/2\\ 0,\ \textit{вне этой области}\end{cases}.$$

Распределение амплитуды светового поля в плоскости щели $\varepsilon_1(x)$ с точностью до константы совпадает с этим выражением. Подставив его в интеграл типа (3.8) по двум координатам и выполнив интегрирование с учетом соотношения (3.7) находим амплитуду светового поля в дальней зоне:

$$\varepsilon(k_x)=d_x\frac{\sin(k_x d_x/2)}{k_x d_x/2}$$

или

$$\varepsilon(\varphi_x)=d_x\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi d_x\sin\varphi_x}{\lambda}\right),\qquad(3.10)$$

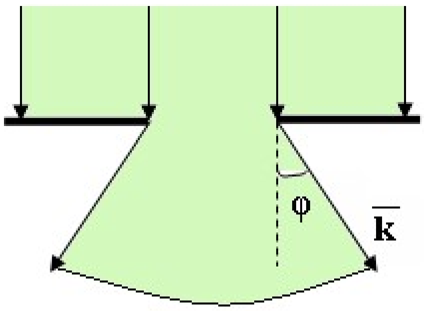
где введено обозначение $\mathrm{sinc}(x)=\sin(x)/x$. Распределение интенсивности светового поля пропорционально квадрату этого выражения, а его сечение вдоль оси $\sin\varphi_x$ изображено на рис. 3.7.

Из формул (3.9) найдем угловую ширину главного (нулевого) максимума дифракционной картины по одной из осей $\Delta\varphi_x\approx 2\lambda/d_x$, а ширину по оси $\boldsymbol{k_x}$ определим из условия $\Delta k_x\cdot d_x=4\pi$. Поскольку амплитуда первого максимума интенсивности составляет около 4% амплитуды нулевого, почти весь световой поток сосредоточен в пределах именно нулевого максимума, и полученные формулы определяют фактически ширину спектра по углу φ_x или оси k_x

Рассмотрим физический смысл этого выражения с другой точки зрения. Для этого рассмотрим световой поток как поток квантов света (фотонов). Умножив на $\hbar$ обе части этого равенства, получим

$$\Delta p_x \cdot d_x = 2h = const,$$

где Δp_x-ширина спектра импульсов потока фотонов, прошедших щель шириной d_x. Полученное равенство можно рассматривать как сохранение при произвольном изменении ширины щели, произведения размера потока фотонов в координатном пространстве на его “размер” в импульсном пространстве, т.е. фазового объема потока. Этот вывод является иллюстрацией фундаментального физического *принципа неопределенности*, справедливого не только для квантов электромагнитного поля, но и для любых других



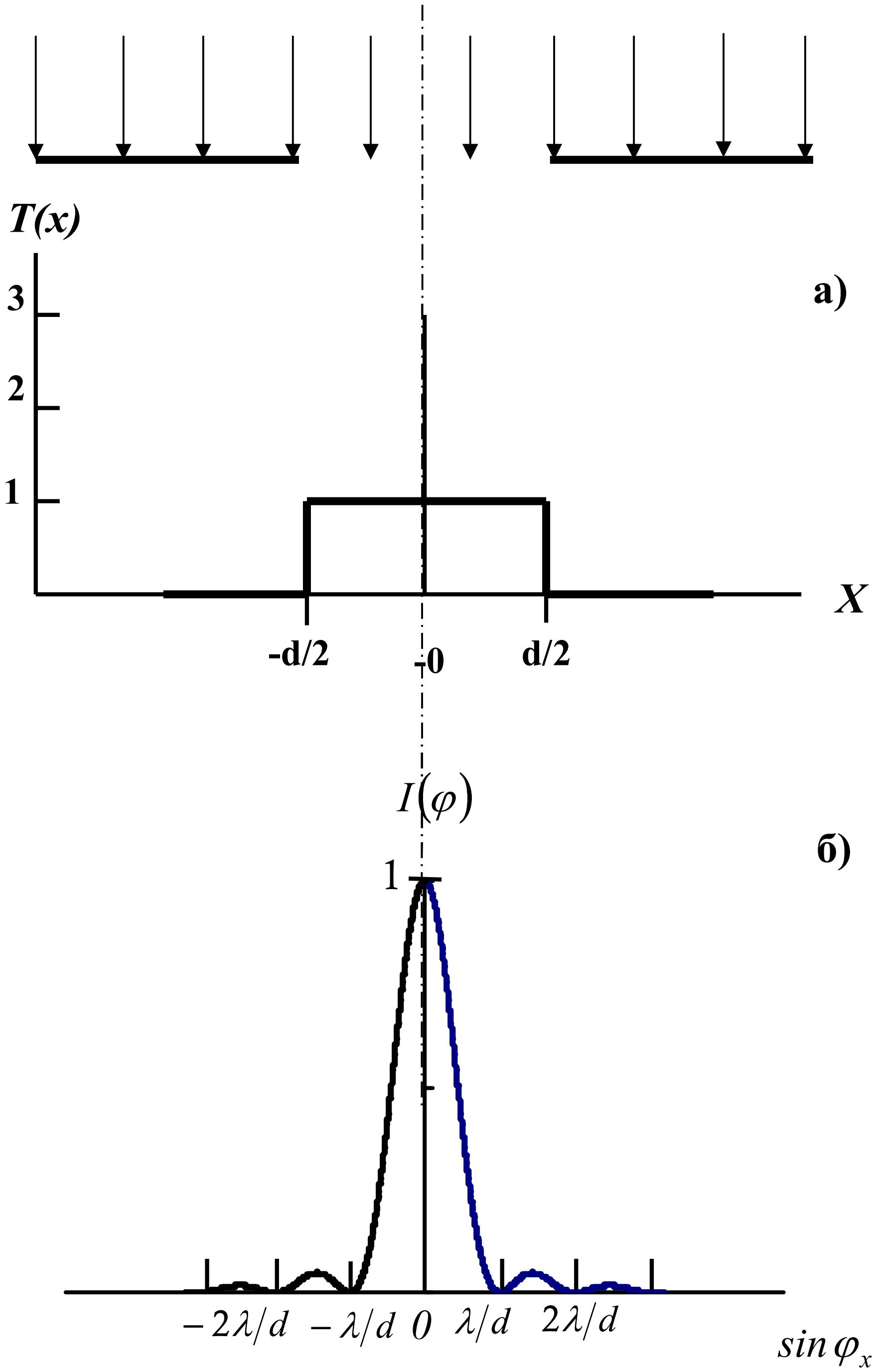


Рис.3.7. Функция пропускания одномерной щели шириной d по оси X - (а) и соответствующее распределение интенсивности на картине дифракции (Фраунгофера) в дальней зоне - (б).

объектов, обладающих волновыми свойствами (например, электронов, протонов и др.).

2) **Круглое отверстие.** Функция пропускания для отверстия радиуса R имеет вид:

$$T(r) = \begin{cases} 1, \text{ при } r \le R \\ 0, \text{ при } r > R \end{cases}.$$

Действуя так же, как в предыдущем пункте, придем к двумерному интегралу вида (3.8) в полярных координатах (r, ϕ), который после интегрирования по углу принимает вид:

$$\varepsilon(k_r) = 2\pi A \int_0^R J_0(k_r r)\, dr, \qquad (3.9)'$$

где $J_0(x)$- специальная функция (Бесселя) нулевого порядка. Этот интеграл выражается через функцию Бесселя первого порядка. Качественно полученная дифракционная картина аналогична описанной выше, и представляет собой центральное яркое пятно круглой формы, окруженное системой концентрических темных и светлых колец, соответствующих последовательным минимумам и максимумам интенсивности. Угловой размер центрального максимума (пятна Эйри), где сосредоточен, как и в предыдущем случае, практически весь световой поток, равен

$$\Delta\varphi_r \approx 1.22 \frac{\lambda}{R}. \qquad (3.9)''$$

3) **Дифракционная решетка.** Для случая прямоугольной (одномерной) амплитудной решетки функция пропускания имеет вид (см. рис.3.8):

$$T(x) = \sum_{n=0}^{N} t(x - x_n),$$

где N – число штрихов, $x_n = nd$ - координата левой границы n-го штриха, $t(x - x_n)$- функция пропускания n -го штриха:

$$t(x-x_n)=\begin{cases}0,\ \textit{при}\ x-x_n\le l\\ 1,\ \textit{при}\ l<x-x_n\le d\end{cases}.$$

Из рис. 3.8 видно, что функция пропускания решетки характеризуется тремя пространственными масштабами: шириной штриха l, периодом d и полным размером $D=Nd$. При интегрировании функции пропускания n-ого штриха можно заметить, что фаза плоской волны $ik_x(x-nd)$ состоит из двух слагаемых: первое меняется непрерывно на ширине штриха, второе – дискретно, с шагом d, при переходе от одного штриха к другому.

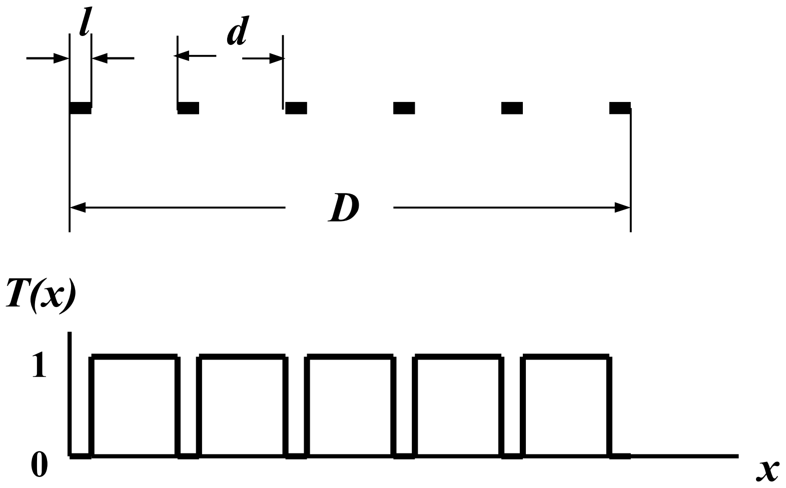


Рис.3.8. Функция пропускания одномерной дифракционной решетки

В соответствии с этим, распределение амплитуды светового поля дифракционной картины в дальней зоне имеет вид произведения двух функций:

$$\varepsilon(k_x)=\varepsilon_I(k_x)f_N(k_x),$$

где первый множитель описывает дифракцию на отдельном штрихе и аналогичен выражению, полученному в предыдущем пункте:

$$\varepsilon_I=l\,\mathrm{sinc}(k_x l/2).$$

Второй множитель возникает вследствие суммирования (интерференции) волн, испускаемых штрихами как точечными источниками с координатами x_n, и вычисляется как сумма N членов геометрической прогрессии:

$$f_N(k_x) = \sum_{n=1}^{N} A_0\, exp(ik_x nd) = A_0\, \frac{1 - exp(iNk_x d)}{1 - exp(ik_x d)}.$$

Учитывая, что $k_x = k \sin\varphi$ и переходя к интенсивностям светового поля согласно формуле:

$$I(\varphi) = \frac{c}{8\pi} \left|\varepsilon(\varphi)\right|^2,$$

получим

$$I(\varphi) = I_m F_1(\varphi) F_N(\varphi). \qquad (3.10)$$

Здесь введены обозначения:

$$I_m = \frac{cl^2 A_0^2}{8\pi\lambda b},$$

$$F_1(\varphi) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{2} kl \sin\varphi\right), \qquad (3.11)$$

$$F_N(\varphi) = \left[\frac{sin\left(\frac{1}{2} Nkd\, sin\,\varphi\right)}{sin\left(\frac{1}{2} kd\, sin\,\varphi\right)}\right]^2 \qquad (3.12)$$

Вид функций $F_1(\varphi), F_2(\varphi), I(\varphi)$ показан на рис.(3.9). Из рисунка следует, что в структуре дифракционной картины наблюдаются три характерных угловых масштаба:

1) **Расстояние** между соседними главными максимумами $\delta(\sin\varphi)_d$, Оно находится из условия, что распространяющиеся в направлении главных максимумов φ_m волны, которые излучаются точками решетки, разнесенными на период d, усиливают друг друга, т.е. их разность фаз кратна 2π: $kd\sin\varphi_m = 2\pi m$, или $\sin\varphi_m = m\lambda/d$ и $\delta(sin\,\varphi)_d \approx \delta\varphi_d = \lambda/d$. Здесь

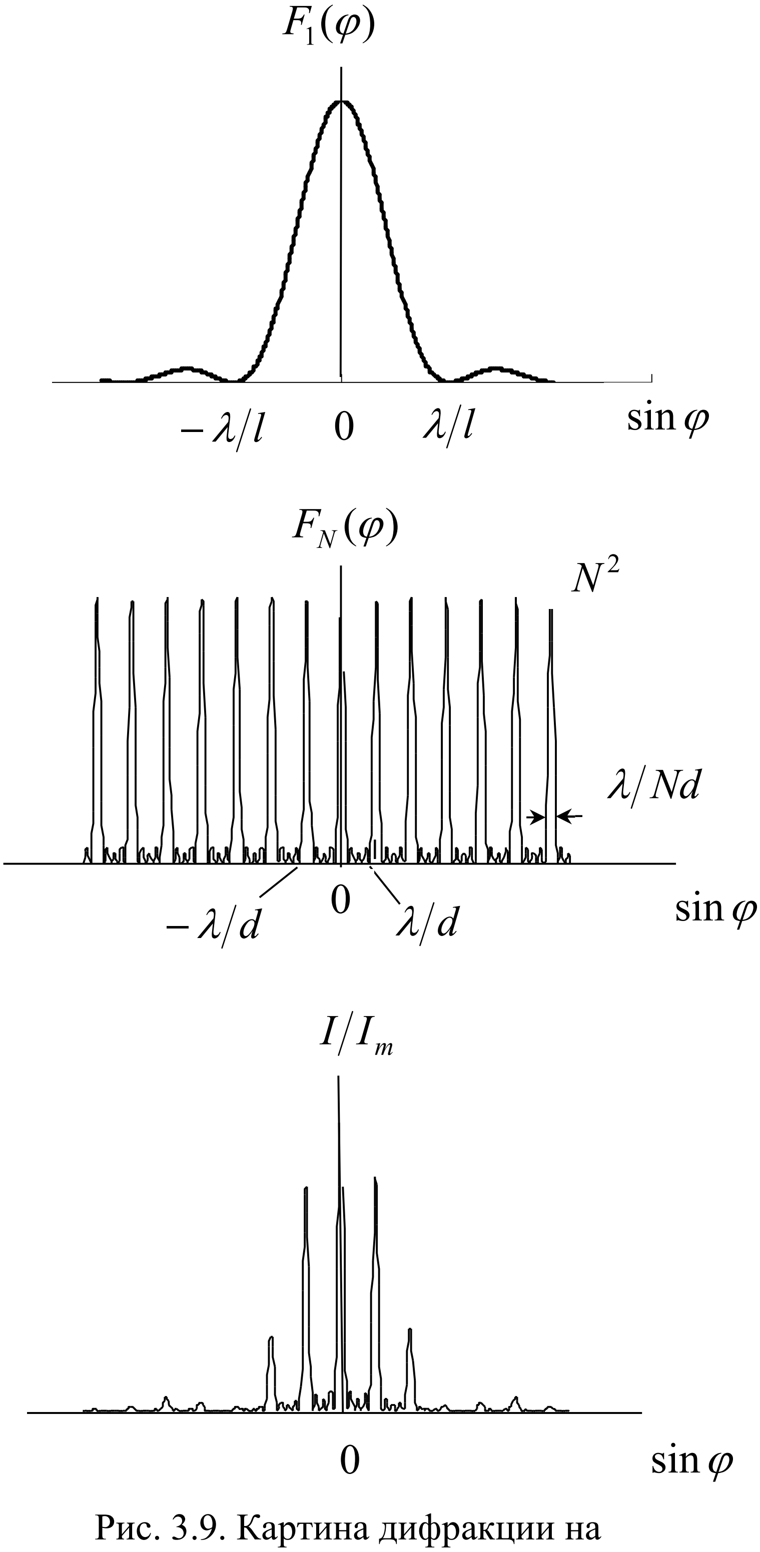


Рис. 3.9. Картина дифракции на одномерной решетке

$m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \pm m_{\max}$, а максимальный порядок дифракции $m_{\max}$ определяется неравенством $|m_{\max}| \le d/\lambda$. Из формулы (3.12) видно, что для этих направлений $F_N = N^2$, т.е. интенсивность суммарного светового поля в главных максимумах действительно возрастает в N^2 раз по сравнению с полем одного штриха.

2) **Ширина главных максимумов** $\delta(\sin\varphi)_D$, которая для m-ого максимума находится из условия, что под углом $\varphi_m + \delta\varphi$ наблюдается ближайший минимум, т.е., согласно формуле (3.12): $Nkd\sin(\varphi_m + \delta\varphi) = 2\pi$, или $\delta_D(\sin\varphi) \approx \delta\varphi_D = \lambda / Nd = \lambda / D$.

3) **Ширина всей картины** $\delta_l(\sin\varphi)$, определяемая характерной шириной функции $F_1(\varphi)$, т.е. условием $kl\sin\varphi = \pm 2\pi$. Отсюда $\delta_l(\sin\varphi) \approx \delta\varphi_l = \lambda / l$.

Этим трем масштабам ($\delta\varphi_d$, $\delta\varphi_D$, $\delta\varphi_l$) в дифракционной картине, представляющей собой Фурье – спектр функции пропускания по переменной $k_x = k\, sin\,\varphi$, соответствуют три пространственных масштаба в самой функции $T(x)$: d, D, l, причем, как видно из формул для $\delta\varphi$, в соответствии с общими свойствами Фурье-преобразования, каждый масштаб в объекте обратно пропорционален соответствующему масштабу в его спектре.

Из рис. 3.9 также видно, что картина дифракции на периодической структуре содержит в интерференционном члене $F_N(\varphi)$ информацию о параметрах этой структуры. В частности, *период* структуры d можно найти из углового расстояния между соседними главными максимумами: $d = \lambda / \delta(sin\,\varphi)_d$. *Количество элементов* структуры N связано с числом минимумов между соседними главными максимумами. Действительно, направления на минимумы φ_n находятся из условия обращения в нуль числителя при ненулевом знаменателе, т.е. $Nkd\, sin\,\varphi_n = 2\pi\, n$, но при этом необходимо обеспечить условие, чтобы $kd\, sin\,\varphi_p \ne 2\pi\, p \quad (n, p = 0, 1, \pm 2, ...)$. Отсюда получим $n = 1, 2, ... \quad N - 1$. Для случая, когда $\lambda/d > 1$, в дифракционной картине остается единственный (нулевой) главный максимум, и она теряет информацию о структуре объекта. Этот случай соответствует переходу от дифракции на объекте с периодической структурой (т.е., фактически, многолучевой интерференции) к дифракции на объекте, как целом.

Рассмотрим этот переход подробнее. Определим нормировочный множитель, полагая амплитуду поля, падающего на всю решетку, равной единице, тогда $A_0 = 1/N$. Зафиксируем размер дифракционной решетки D, и будем увеличивать число штрихов N, т.е. уменьшать период d. Тогда при достаточно большом N выполняется неравенство $d/\lambda = kD/2\pi N << 1$, и интерференционный множитель F_N преобразуется к виду:

$$F_N(\varphi) = \left[\frac{sin\left(\frac{1}{2}kD\,sin\,\varphi\right)}{sin\left(\frac{1}{2}k\frac{D}{N}sin\,\varphi\right)}\right]^2 \approx A_0^2\left[\frac{sin\left(\frac{1}{2}kD\,sin\,\varphi\right)}{\frac{kD}{2}sin\,\varphi}\right]^2 = \quad (3.12').$$

$$= \left[sin\,c\left(\frac{1}{2}kD\,sin\,\varphi\right)\right]^2$$

Это выражение аналогично формуле (3.11) и описывает картину дифракции на «штрихе» шириной D.